

Análisis macro/meso estructural de hormigones sometidos a altas temperaturas

Rizo Patrón, Marcia¹; Lorefice, Ricardo H.¹ y Pérez, Gustavo A.²

(1) *Instituto de Materiales, Estructuras y Construcciones, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero.*

rizopatron@gmail.com; rlorefice@gmail.com

(2) *Instituto de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán.* gperez@herrera.unt.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo se presenta el análisis de probetas de hormigón simple en configuraciones macro/meso mecánicas con el fin de estudiar la distribución de temperaturas y de tensiones originadas durante el proceso termo mecánico en el cual intervienen altas temperaturas. El estudio se basa en la aplicación de un modelo constitutivo termo-elasto-visco plástico desarrollado al efecto mediante el cual es factible indagar sobre el comportamiento de sólidos y estructuras sometidas a altas temperaturas, con el objeto de predecir su respuesta mecánica una vez producida la degradación de los parámetros que definen el material. Este criterio permite el análisis de problemas acoplados termo mecánicos con una metodología alternativa a las complejas técnicas basadas en la mecánica de fluidos computacional.

ABSTRACT

In this paper we present a two-level analysis of plain concrete samples (macro and meso level of observation) to study temperature and stress distribution inside concrete mass during the thermo-mechanic process involving high temperatures. The analysis is based on the development of a thermo-elasto-viscoplastic constitutive model which allows to predict the mechanical behavior of solids and structures under high temperatures taking into account the material degradation at constitutive level. This is a suitable approach in order to analyze coupled thermo-mechanical problems without need of very complex techniques such as those based on the computational fluid dynamics.

Palabras claves: hormigón - modelación constitutiva - acoplamiento termo-mecánico

Keywords: concrete - constitutive modeling - coupled thermo-mechanic

1. INTRODUCCIÓN

El interés en el comportamiento del hormigón a altas temperaturas obedece principalmente al efecto catastrófico que algunos casos de incendios han producido en estructuras de edificios, túneles y plataformas de perforación. Durante un incendio la temperatura puede alcanzar hasta los 1100°C en edificios y hasta los 1300°C en túneles, pudiendo producir severos daños en la estructura de hormigón armado. En algunos casos, incluso temperaturas más bajas pueden causar una destrucción explosiva de un elemento estructural de hormigón disminuyendo su capacidad resistente. Sin embargo el hormigón está

considerado como un material de construcción que preserva satisfactoriamente sus propiedades cuando es expuesto a temperaturas elevadas. En efecto, esto es debido a que su coeficiente de conductividad térmica es sensiblemente bajo, lo cual produce que la transmisión del calor a través del hormigón sea muy lenta y que, por ende, las barras de acero de refuerzo que son muy sensibles a la degradación térmica queden protegidas al estar ubicadas en el seno del material, permitiendo que la estructura permanezca en pie un tiempo relativamente largo. Cuando el hormigón es sometido a condiciones de incendio, el aumento de temperatura en las capas más internas del material es progresivo, pero como este proceso es lento se

producen importantes gradientes de temperatura entre la capa superficial más externa y las interiores, lo cual induce daños adicionales a la estructura interna del material. En consecuencia resulta de gran importancia identificar los complejos cambios que ocurren en el hormigón durante este proceso de incremento de temperaturas. Este proceso de degradación implica tanto cambios químicos como físicos que se producen en la matriz cementicia, principalmente fenómenos que involucran el transporte de gases y líquidos en la masa del material. El análisis es de alta complejidad, debido al hecho de que el hormigón es un material compuesto principalmente de dos constituyentes sustancialmente diferentes: pasta de cemento y agregados. Las consecuencias de los distintos cambios que ocurren en el hormigón mientras se calienta son las alteraciones de sus propiedades físicas, mecánicas y térmicas. Las investigaciones realizadas han demostrado que los cambios en la resistencia del hormigón en función de la temperatura están relacionados, entre otros factores a: la composición del hormigón, el tipo de agregados, la relación agua/cemento, la presencia de aditivos puzzolánicos, etc. Otros factores importantes son la tasa de aumento de temperaturas (gradiente térmico) y el tiempo total de exposición a las mismas.

Por lo expuesto, es claro que la predicción de falla de este tipo de materiales involucra una serie de análisis de complejidad extrema, por lo que debe recurrirse en general a métodos numéricos avanzados que permitan resolver problemas acoplados de múltiples variables, con condiciones de borde dinámicas y múltiples fases interactuando simultáneamente. Esta complejidad es la que impide en general que estos procedimientos se apliquen a problemas reales en los cuales se pretenda determinar la capacidad soporte de estructuras comunes en el ámbito de la ingeniería civil, por lo que es necesario contar con procedimientos alternativos que permitan analizar este tipo de problemas de manera lo suficientemente realista. En particular, el criterio que se presenta en este trabajo apunta a generar un modelo constitutivo termo-mecánico acoplado que permita determinar con razonable grado de precisión a los fines prácticos la respuesta estructural de un material complejo como el hormigón en el marco de escenarios de incendio, abordando la resolución no lineal del problema de valores de borde en el marco del Método de los Elementos Finitos (MEF). Se considera que gran parte de la complejidad de los modelos acoplados pueden simplificarse asumiendo la validez de la mecánica de medios continuos no lineal mediante

la inclusión de variables de estado propias del modelo que son función de la intensidad de la carga térmica, la cual se introduce en la formulación constitutiva basada en la Teoría de la Plasticidad, o bien en la Teoría de la Elasto-Viscoplasticidad, la Teoría de Daño, Mecánica de Fractura no lineal o combinaciones de ellas. El problema estructural combinado con acciones térmicas se resuelve considerando el acoplamiento termo-mecánico usando técnicas conocidas de resolución de algoritmos no lineales acoplados en el entorno del MEF. Si bien esta metodología simplifica considerablemente las hipótesis, las condiciones de borde reales del problema y el esfuerzo computacional necesario para su resolución, requiere de un alto grado de conocimiento de las técnicas computacionales de resolución de problemas termo-mecánicos acoplados no lineales, adicionalmente al dominio de las teorías constitutivas mencionadas anteriormente. El desarrollo de este tipo de metodología de análisis permite estudiar con buen grado de precisión la distribución de las temperaturas, tensiones y deformaciones en la masa del hormigón, permitiendo de ese modo evaluar los aspectos más relevantes del fenómeno, empleando elementos finitos convencionales a niveles de análisis meso y macro mecánico y comparar dichos resultados con las predicciones de los métodos propuestos por los reglamentos actuales lo cual contribuye a un diseño más eficiente y racional de las estructuras con riesgo de falla por incendio o exposición a temperaturas elevadas durante periodos prolongados de tiempo, tales como túneles, rascacielos, estructuras de contención nuclear, etc.

2. MODELO PARABÓLICO DE DRUCKER PRAGER CON VISCOPLASTICIDAD

A nivel constitutivo se emplea un modelo para hormigones maduros sometidos a altas temperaturas, apto para la simulación de casos de incendio en estructuras de hormigón y hormigón armado a nivel macro/mesomecánico. La base del modelo está constituida por la teoría de la elasto-viscoplasticidad de Perzyna (1963) considerando una modificación del criterio inviscido de Drucker-Prager (1952), previa calibración del mismo en función de la evolución de las resistencias a compresión y tracción uniaxial en función de la temperatura. Los procesos en los que las estructuras se someten a altas temperaturas son dependientes del tiempo de exposición, y de acuerdo con evidencias experimentales el hormigón sufre fenómenos reológicos durante la exposición a temperaturas elevadas (fenómeno

denominado transient creep). La formulación adoptada permite tener en cuenta el efecto tiempo-tasa dependiente por medio de la consideración de la teoría de la viscoplasticidad propuesta por Perzyna, considerando además la variación de los parámetros de viscosidad con la temperatura, integrando de manera natural la historia de tensiones y deformaciones bajo carga, acción de temperatura y fenómenos reológicos, obteniendo de este modo una herramienta numérica para el análisis de estructuras reales sometidas a acciones térmicas elevadas tales como el caso de incendios.

2.1 Modelo constitutivo

El criterio de máxima resistencia se plantea como:

$$F = F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = F(J_2, I_1, \mathbf{q}) \quad (1)$$

$$F = J_2 + \alpha(T)I_1 - \beta(T) + \chi_j(\mathbf{q}, T) \quad (2)$$

En la ecuación (1), $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ representa la función de fluencia del material, dependiente del tensor de tensiones y del tensor de variables internas \mathbf{q} , las cuales representan la degradación de la estructura interna del material. A partir de la descomposición aditiva del tensor de tensiones en sus partes volumétrica y desviadora, es posible expresar el criterio de Drucker-Prager (ver ec. (2)) en términos de los invariantes del tensor de tensiones, invariante desviador J_2 y del primer invariante I_1 o traza de $\boldsymbol{\sigma}$, y de la fuerza de endurecimiento termo-mecánica, $X_j(\mathbf{q}, T)$, ver Coussy et al.(2004). Los parámetros de resistencia $\alpha = \alpha(f^c, f^t, T)$ y $\beta = \beta(f^c, f^t, T)$ son dependientes de las resistencias a compresión f^c y a tracción f^t del material las cuales, a su vez, dependen de la temperatura como se ilustra en las figuras siguientes:

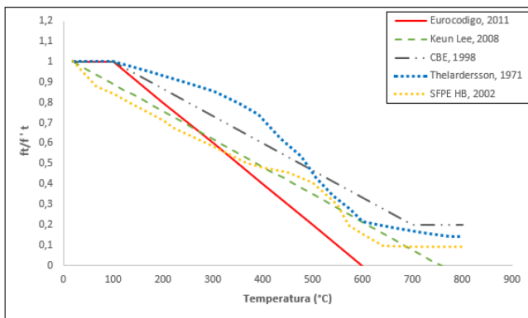


Figura 1: Evolución de f^t con la temperatura

$$\alpha(T) = \frac{f_c^t(T) - f_t^t(T)}{3} \quad (3)$$

$$\beta(T) = \frac{f_c^t(T) + f_t^t(T)}{3} \quad (4)$$

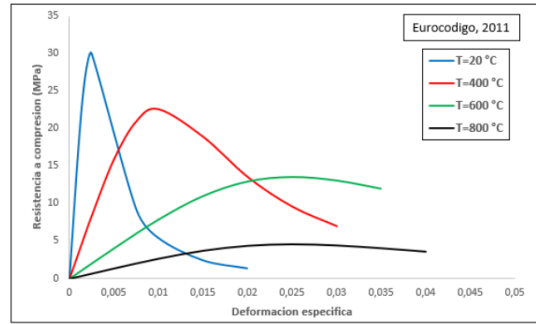


Figura 2: Evolución de f^c con la temperatura

La superficie de fluencia parabólica del modelo así planteado origina las curvas que se ilustran en la Figura 3, en las que se aprecia la contracción del dominio encerrado bajo la curva de máxima resistencia a medida que se incrementa la temperatura de exposición del material, desde el valor inicial a una temperatura de referencia de 20°C, la cual evoluciona gradualmente y conlleva a la reducción de la resistencia mecánica tanto en tracción como en compresión uniaxial.

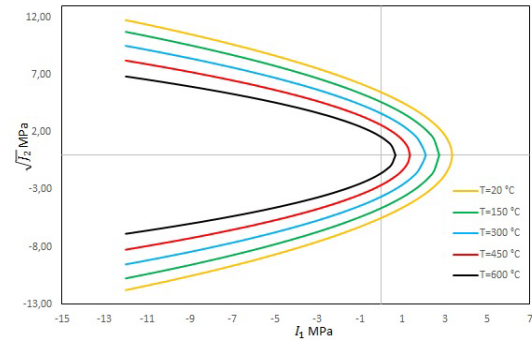


Figura 3: Evolución criterio DP ($\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, T^\circ\text{C}$)

Teniendo en cuenta que el tensor de deformaciones se puede descomponer en una parte elástica, otra plástica y la componente debida a la temperatura, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_T \quad (5)$$

También es posible expresar la componente plástica de la deformación (asumiendo $Q = F$, flujo plástico asociado) como la descomposición aditiva en una parte volumétrica y la parte desviadora. El cumplimiento de la condición general de consistencia plástica considerando el acoplamiento termo-mecánico toma la forma de la ecuación (6)

$$d\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} : d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial T} dT \quad (6)$$

Expresando la condición de consistencia en términos de la variable plástica de

endurecimiento/ablandamiento y operando se obtiene la expresión clásica del multiplicador plástico

$$d\lambda = \frac{1}{H_{pl}} \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - H_T dT \right] \quad (7)$$

$$\text{con } H_{pl} = \frac{\partial F}{\partial \chi_j} \frac{\partial \chi_j}{\partial \kappa_j} \frac{\partial \kappa_j}{\partial \lambda} \quad (8)$$

siendo κ_j y χ_j las variables internas de endurecimiento y la fuerza de endurecimiento interna conjugada, respectivamente. H_{pl} se denomina módulo de endurecimiento y H_T es el denominado módulo térmico. A fin de introducir la dependencia en el tiempo/tasa, se plantea la modificación de la superficie de máxima resistencia de Drucker-Prager (1952) siguiendo la propuesta de Perzyna (1963) quien formula la existencia del potencial viscoplastico G , ver Rizo Patrón et al (2017).

3. ANÁLISIS NUMÉRICOS

Se presentan en esta sección los análisis comparativos de la respuesta del modelo siguiendo dos criterios: macro mecánico y mesomecánico, entendiendo como nivel macro a aquel análisis en el que se considera al material como un continuo de una fase única, mientras que el análisis mesomecánico involucra las fases mortero y agregado cada una con sus propiedades particulares. Se estudia la evolución del gradiente térmico en el material y la generación de tensiones en el mismo. Los mapeos de temperatura [°C] y de tensiones [kg/cm²] generadas se ilustran en las siguientes figuras para intervalos de tiempo seleccionados y que cubren una exposición total máxima de 120 minutos, en concordancia con los tiempos indicados en los códigos de construcciones para el análisis de estructuras sometidas a la acción del fuego (ACI / EC2).

3.1 Criterio macromecánico

El modelo en estudio a nivel macromecánico corresponde a una probeta cuadrada de dimensiones $b \times b = 20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$, representando hormigón simple con una resistencia de 30 MPa. La malla se compone de 100 elementos cuadriláteros en estado plano de tensiones, ver Figura 4.

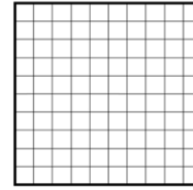


Figura 4: Malla macro-mecánica

En la Tabla 1 se indican los valores de las propiedades termo-mecánicas, a temperatura ambiente (20°C), del hormigón que conforma la malla.

Propiedades del hormigón	
Módulo de Elasticidad	260.000 kg/cm ²
Coef. de Poisson	0,20
Densidad	0,0024 kg/cm ³
Calor Específico	900 J / kg°C
Conductividad Térmica	1,6 W/m°C
Coef. de dilatación	1.10 ⁻⁵ 1/°C

Tabla 1: Propiedades termo-mecánicas del hormigón a temperatura ambiente (20°C)

3.2 Criterio mesomecánico

Este criterio permite la observación del material como bifásico, y considera la existencia de elementos finitos representativos de los agregados y de la matriz de mortero. Las mallas meso mecánicas fueron generadas mediante un proceso estocástico, en el cual primeramente se subdivide la superficie de la probeta en polígonos de Voronoi, sobre cuya base se aplica una perturbación Monte Carlo que modifica la base obteniéndose un arreglo aleatorio, ver Stankowski (1990), Vonk (1992). Mediante este proceso se generan las posiciones de los agregados y el mortero entre estos, debiéndose luego realizar en general una corrección específica de aquellos sectores de la malla en los cuales la geometría presente zonas de alta irregularidad con el fin de eliminar las mismas. Finalmente, sobre la base de los polígonos se generan los elementos finitos planos triangulares, ver Figuras 5 y 6:

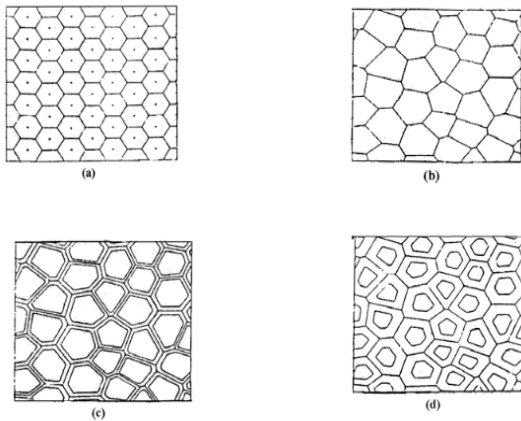


Figura 5: Proceso de generación malla meso-mecánica

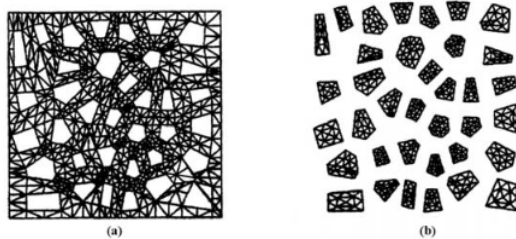


Figura 6: malla mesomecánica (6x6 agregados)

Malla 1: cuadrada, de 20cm x 20cm, representa una probeta de hormigón simple de 30 MPa a nivel mesomecánico, compuesta por 288 elementos de agregado y 416 elementos de mortero, en estado plano de tensiones, a la que se le aplica una temperatura de 200°C en sus cuatro bordes.

Malla 2: probeta cuadrada de 20cm x 20cm que simula una probeta de hormigón simple de 30 MPa a nivel mesomecánico, compuesta por 676 elementos de agregado y 964 elementos de mortero, en estado plano de tensiones, a la que se le aplica una temperatura de 200°C en sus cuatro bordes.

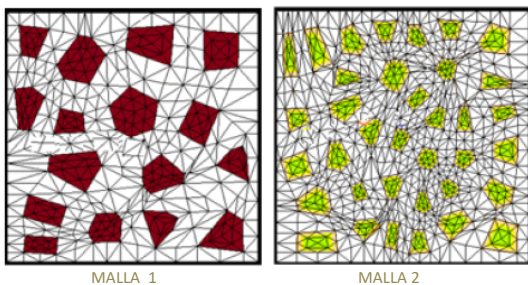


Figura 7: Mallas meso-mecánicas (4x4 / 6x6)

Las propiedades del agregado y del mortero consideradas se indican en la tabla 2.

Propiedades	Mortero	Agregado
Módulo de Elasticidad	200.000 kg/cm ²	320.000 kg/cm ²
Coef. de Poisson	0,20	0,25
Densidad	0,0020 kg/cm ³	0,0017kg/cm ³
Calor Específico	900 J / kg°C	850 J / kg°C
Conductividad Térmica	1,4 W/m°C	1,2 W/m°C
Coef. de dilatación	1,1 .10 ⁻⁵ 1/°C	9 .10 ⁻⁶ 1/°C

Tabla 2: Propiedades termo-mecánicas del agregado y del mortero a temperatura ambiente (20°C)

3.3 Simulación numérica

3.3.1 Malla macro-mecánica

En la Figura 8 se presenta la comparación de la evolución de la temperatura en el tiempo en cuatro puntos de la malla macro-mecánica en distintas ubicaciones de la sección transversal.

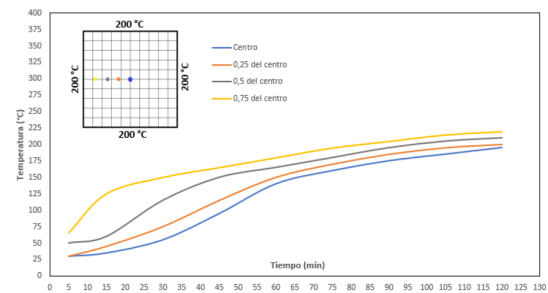


Figura 8: Evolución temperatura vs tiempo

En las Figuras 9, 10 y 11 se ilustra la evolución en el tiempo de las tensiones que caracterizan al estado plano asumido en estos análisis (σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy}). En estas gráficas se puede apreciar como los valores se incrementan inicialmente al alcanzar la temperatura esas ubicaciones, para luego pasar por un pico y descender finalmente a medida que se avanza hacia el equilibrio térmico. Se pueden apreciar además, las diferentes trayectorias evolutivas de las variables tensionales a medida que transcurre el tiempo.

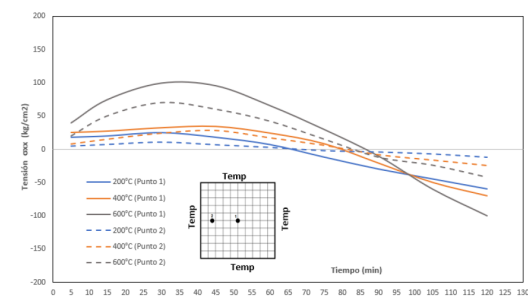


Figura 9: Evolución de las tensiones σ_{xx} vs tiempo en dos puntos de la sección transversal

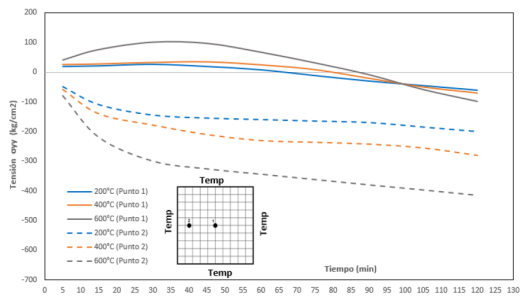


Figura 10: Evolución de las tensiones σ_{yy} vs tiempo en dos puntos de la sección transversal

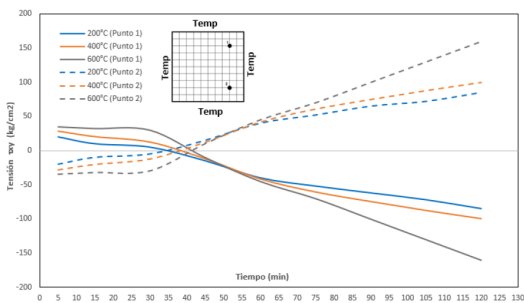


Figura 11: Evolución de las tensiones τ_{xy} vs tiempo en dos puntos de la sección transversal

3.3.2 Mallas mesomecánicas

Con el fin de indagar sobre la incidencia de la configuración de la malla en el análisis tensional, se presentan en las siguientes figuras algunos resultados obtenidos en las mallas meso mecánicas. Si bien se aprecia una cierta concordancia para puntos ubicados en similares posiciones, se hallan algunas diferencias que en rigor pueden incrementarse a medida que la dosificación de la pasta cementicia genere propiedades termo-mecánicas que difieran de aquellas que poseen los agregados, ver las Figuras 12 a 14, en las que se ilustran las comparaciones tensionales entre puntos ubicados en el mortero o en el agregado y contrastados con los valores obtenidos siguiendo el criterio de material homogéneo (macro-mecánico).

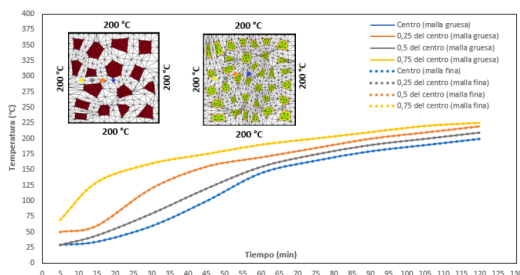


Figura 12: Evolución de las temperaturas en el tiempo obtenidas con cada malla

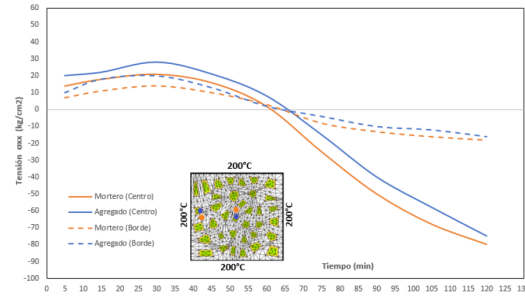


Figura 13: Evolución de las tensiones σ_{xx} en el mortero y en el agregado en dos puntos de la sección transversal

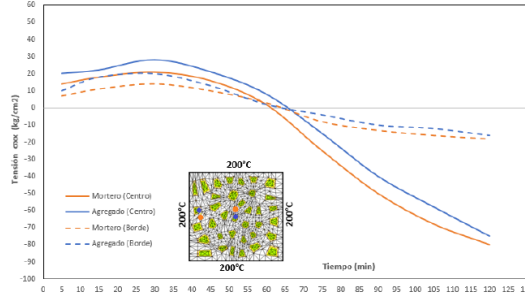


Figura 14: Evolución de las tensiones σ_{yy} en el mortero y en el agregado en dos puntos de la sección transversal

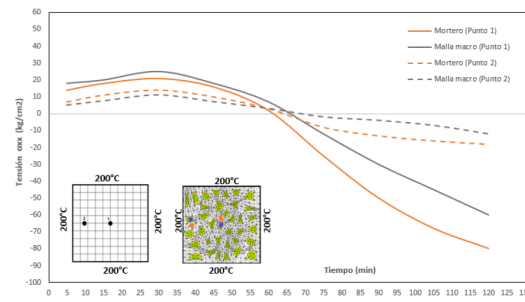


Figura 15: Tensiones σ_{xx} en el mortero y en la malla macro-mecánica, en dos puntos de la sección transversal

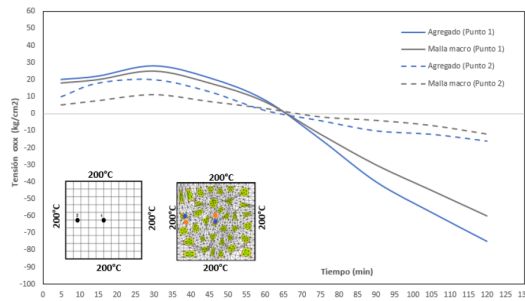


Figura 16: Tensiones σ_{xx} en agregados, en dos puntos de la sección transversal

Los resultados obtenidos son satisfactorios, ya que en principio esta metodología permite estudiar

diferentes casos en los que la constitución material entre las fases difieran, por ejemplo al uso de hormigones de alta resistencia u hormigones de diferentes clases, analizar los gradientes térmicos y por ende los diferenciales tensionales que se produzcan dentro de la masa del hormigón para determinadas dosificaciones del mismo, pudiéndose predecir mediante este criterio el riesgo de fisuración interna del material ante diversos grados de exposición.

4. CONCLUSIONES

Se ha presentado un análisis computacional a niveles macro/meso mecánico del problema acoplado termo-mecánico aplicable a hormigón estructural convencional o de alta resistencia. La técnica adoptada implica el empleo de modelos constitutivos basados en la mecánica de medios continuos, lo cual en el marco global del Método de los Elementos Finitos No lineal posibilita el estudio de problemas de predicción de gradientes térmicos y estados tensionales en el interior del material teniendo en cuenta la degradación del mismo por afectación térmica. El planteo adoptado permite el estudio de problemas de capacidad portante estructural a nivel local o global (seccional/estructural), conservando un grado de precisión adecuada con las consiguientes ventajas en cuanto a esfuerzo computacional, el cual para las mallas y rango de valores empleados oscila entre 30 – 120 minutos, dependiendo del problema en particular. Esto implica un gran ahorro en recursos computacionales, tiempo de análisis y posibilidad de incluir mayor variedad de casos en comparación con los criterios basados en la Mecánica de Fluidos Computacional, los cuales implican en algunos casos varios días de cálculo, además de la dificultad propia de dichos modelos en cuanto a la adecuada calibración de los mismos y asignación de condiciones de borde.

5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado con fondos del Proyecto de Investigación 23/C162 perteneciente al Instituto de Materiales, Estructuras y Construcciones (IMEC) de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, aprobado por el Consejo de Investigaciones de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Santiago del Estero (CICyT-UNSE).

6. REFERENCIAS

- Bazant, Z. P., Kaplan, M.F., Concrete at high temperatures: material properties and mathematical models, *Pearson Education*, 1996.
- Bošnjak, J., Ožbolt, J., Modeling thermal strain of concrete at mesoscale, 9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures (FraMCoS-9), Berkeley, USA, 2016.
- Coussy, O., *Poromechanics*, John Wiley & Sons Ltd., England, 2004.
- Drucker, D.C., Prager, W, Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quarterly of Appl Math*, Vol 10, 157-165, 1952.
- Haniche, R., Contribution a l' etude des betons portés en temperature - evolution des propriétés de transfert: etude de l'eclatement, Ph.D. thesis, Institut National de Sciences Appliquées de Lyon, France, 2011.
- Kodur V., Dwaikat, M., Raut, N., Macroscopic FE model for tracing the fire response of reinforced concrete structures, *Engineering Structures*, Vol 31, 2368-2379, 2009.
- Kukla, K., Concrete at high temperatures: hygro-thermo-mechanical degradation of concrete, *PhD Thesis, University of Glasgow*, United Kingdom, 2010.
- Lorefice, R., Etse, G., Lopez, C, Carol, I., Mesomechanic Analysis of time dependent Concrete Behaviour, EURO-C, *Computational Modelling of Concrete Structures*, Austria, 2006.
- Lorefice, R, Etse, G., Viscoplastic approach for rate-dependent failure analysis of concrete joints and interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, Vol 45, 2686-2705, 2008.
- Luccioni, B., Figueroa, M., Danesi, R., Thermo-mechanic model for concrete exposed to elevated temperatures, *Engineering Structures*, Vol 25, 729-742, 2003.
- Perzyna, P., The constitutive equations for rate sensitive materials, *Quarterly of Appl Math*, Vol 20, 321-332, 1963.
- Pimienta, P., Alonso, M., Jansson McNamee R., Mindeguia, J-C., Behaviour of high-performance concrete at high temperatures: some highlights, *RILEM Technical Letters*, Vol 2: p45-52, 2017.
- Rizo Patrón, M., Ledesma, M., Navarro, I., Criterios de evaluación de falla de estructuras de hormigón sometidas a temperaturas elevadas”. *Congreso Argentino de Ingeniería (CADI)*, Tucumán, 2014.
- Rizo Patrón, M., Pérez, G.A., Lorefice, R. H., Análisis de estructuras de hormigón sometidas a acciones térmicas elevadas, *III Congreso Arg. de Ingeniería (CADI)*, Resistencia, Chaco, 2016.

- Rizo Patrón, M., Lorefice, R.H., Pérez, G.A., Análisis del comportamiento estructural de columnas de hormigón armado a temperaturas elevadas, *24° Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural (AIE)*, Bs. As., 2016.
- Rizo Patrón, M., Pérez, G.A., Lorefice, R.H., Modelo constitutivo macromecánico para hormigones a temperaturas elevadas, *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Valencia, España, 2017.
- Rizo Patrón, M., Lorefice, R.H., Pérez, G.A., Diseño de secciones de hormigón armado considerando escenarios de incendio, *25° Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural (AIE)*, Resistencia, Chaco, 2018.
- Stankowski, T., Numerical simulation of progressive failure in particle composites. PhD Thesis, Dept. CEAE, University of Colorado, Boulder, USA, 1990.
- Vonk, R., Softening of concrete loaded in compression. PhD Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Postbus, Netherlands, 1992.